

Corrigé

1. Pourcentages pour tous les âges.

a. Oui car la multiplication est commutative : $\frac{x}{100}y = \frac{y}{100}x$. En particulier, en intervertissant les données proposées, on se ramène 25 % de 32 euros, qui en est le quart, soit 8 euros.

b. Même pas en rêve ! Le prix est multiplié par $0,75^4$, soit environ 0,32.

c. Oui, là encore parce que les diagrammes sont commutatifs. Notons x le prix HT et y le prix TTC ; ils sont liés par la relation $y = 1,2x$. Si l'on double y , cela double $1,2x$, et donc x .

2. *Double sens.* Selon que le « le » renvoie au « nombre » ou à « 51 », on trouve 5 100 ou 0,51. Pour lever l'ambiguïté il faudrait construire la question différemment et au besoin, utiliser des virgules.

3. *Le secret pour avoir 20/20.* Le candidat reçoit la note de 7 sur 20. Pourtant, $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{12+3}{15} = 1 = \frac{20}{20}$: le paradoxe tient à ce que le calcul fractionnaire ne tient compte d'aucun coefficient (le problème et l'exercice sont mis sur le même plan, et la « note » est donnée sur 2 et non sur 20).

Dans le cas général, on compare $\frac{a}{5} + \frac{b}{15}$ à $+\frac{a+b}{20}$. Or $\frac{a+b}{20} - \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{15}\right) = -\frac{9a+b}{60}$ qui est négatif, d'où le résultat.

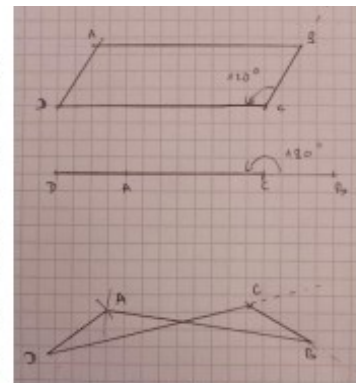
4. *Trouver l'intrus.* On prend 4 oranges au hasard, on en répartit 2 sur chaque plateau. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange non utilisée qui est la moins lourde. Sinon, on prend les 2 oranges du plateau le plus léger et on les compare avec une nouvelle pesée. Avec 2 024 oranges, c'est à peu près la même idée, que l'on réitère. On met 1 012 oranges de part et d'autre. Un plateau est le plus léger. On utilise les 1 012 oranges de ce plateau, on en met 506 de part et d'autre. Un plateau est plus léger. On utilise les 506 oranges de ce plateau, on en met 253 de part et d'autre. Un plateau est plus léger, on prend au hasard 252 de ses oranges, on en met 126 de part et d'autre. Si la balance reste équilibrée, c'est l'orange mise de côté qui est la plus légère. Sinon, on utilise les 126 oranges du plateau le plus léger et on recommence à chaque fois en mettant une orange de côté dès qu'on manipule un nombre impair d'oranges. Dans le pire cas, on passe de 2 024 à 1 012 à 506 à 253 à 126 à 63 à 31 à 15 à 7 à 3 à 1 orange(s) soit 10 pesées.

5. *Tchin !* La pente des parois est (au signe près) égale à $\frac{10}{5} = 2$. Le verre du dessus a besoin de 9 cm de large. Il est translaté verticalement de $1 + 2 = 3$ cm (1 correspond à la hauteur du fond du verre du dessous, et 2 à la hauteur nécessaire pour élargir de 1 cm l'espace de chaque côté des 7 cm de base. L'ensemble s'élève à 13 cm.

6. *Le début de la richesse.* D'après le théorème de Thalès, la configuration proposée entraîne (et même revient à) évaluer $\frac{L}{\ell}$ et $\frac{L+\ell}{L}$. Posons $x = \frac{L}{\ell}$. Tout revient donc à $x = 1 + \frac{1}{x}$. On peut ensuite vérifier que le nombre (d'or) vérifie cette équation, ou la résoudre puisqu'elle se ramène à une équation du second degré.

7. Quelle forme !?

Dessins ci-contre. Pour ce qui est de la réalisation pratique, il y a trois configurations possibles, ici réalisées avec des briques de jeu de construction : deux étages avec les deux grandes barrettes au-dessus des deux petites ; trois étages avec les deux grandes barrettes au même niveau, une petite au-dessus, une petite au-dessous ; trois étages avec les deux petites barrettes au même niveau, une grande au-dessus, une grande au-dessous. Seule la troisième configuration se déforme jusqu'au contre-parallélogramme sans quoi les grandes barrettes vont se gêner quand elles vont se croiser ; quant aux petites, qui sont au même niveau, elles suffisamment petites pour ne pas se gêner à l'endroit des pivots.



8. Rien que pour vos yeux. Notons $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ un vecteur directeur et orientant du rayon incident. Et suivons (par exemple) la trajectoire lue sur le dessin. Après le premier rebond, le rayon est dirigé et orienté par $a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$, après le deuxième par $-a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$ et après le troisième par $-a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$. Le rayon réfléchi qui en résulte est parallèle au rayon incident mais repart dans l'autre sens. Si le coin de cube est petit, ce rayon réfléchi est spatialement très proche du rayon incident. Un catadioptré est composé de nombreux tout petits coins de cube. Un émetteur (voiture avec des phares avant par exemple) le reçoit donc dans les yeux, ce qui l'avertit de la présence d'une voiture ou d'un cycliste devant lui.

9. **Méthode 1.** Notons e l'épaisseur et n le nombre de tours (on le suppose entier, on commet ici une petite erreur). Donc $R + ne = R'$. 1 tour déroule $2\pi R$ longueur de bande, le tour suivant $2\pi(R + e)$, ... le n ième $2\pi(R + (n - 1)e)$. On néglige le petit morceau de bande nécessaire pour monter, d'un tour à l'autre, de l'épaisseur e . En sommant arithmétiquement, $\frac{2\pi(R+e)+2\pi(R+(n-1)e)}{2}n = 2500$ cm. En remplaçant n par $\frac{R'-R}{e}$ on isole $\frac{1}{e}$ puis e qui est (presque) égal à 0,0044 cm, soit la moitié de l'épaisseur d'un cheveu.

Méthode 2. L'aire de la couronne est $\pi(R'^2 - R^2)$. Une fois la bande déroulée on a, toujours vu de profil, un rectangle de largeur e et de longueur 2500 cm. Donc $e = \frac{\pi(R'^2 - R^2)}{2500}$ soit environ 0,0044 cm

10. Partons d'un tableau déjà ordonné horizontalement. Et, sur chaque colonne, intervertissons au besoin les valeurs de la première et de la deuxième ligne. Cela ordonne dans le sens vertical les deux premières lignes. Et on se doute que cela laisse les deux premières lignes bien classées (sinon pour $n = 2$ le résultat de l'énoncé serait faux). Il suffirait alors de répéter cette démarche pour des lignes contiguës (ce qui revient à effectuer un tri bulle colonne par colonne). Revenons donc au cas $n = 2$, qui se réduit à constater que si $x \leq x'$ et $y \leq y'$, alors $\min(x, y) \leq \min(x', y')$ et $\max(x, y) \leq \max(x', y')$.